ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΙΣ ΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΟΥ

Κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους ὁ διακεκριμένος Γερμανὸς Ἑλληνιστὴς Kurt von Fritz ἐδημοσίευσε πραγματείαν ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας» [1] ἔνθα ὑποστηρίζει, ὅτι τὴν ἀσυμμετρίαν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἀνεκάλυψεν ὁ Πυθαγόρειος Ἵππασος [2]. Πρὸς τοῦτο ἐπικαλεῖται τὰς ἑξῆς τέσσαρας πληροφορίας:

1. Ἀνώνυμον σχόλιον εἰς τὸν Φαίδωνα τοῦ Πλάτωνος, ἀναφερόμενον εἰς ἔργον περὶ μουσικῆς τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Ἀριστοξένου, ὅπου δηλοῦται, ὅτι πρῶτος ὁ Ἵππασος ἐξετέλεξε πείραμα ἀκουστικῆς μὲ μεταλλικοὺς δίσκους τῆς αὐτῆς διαμέτρου,

2. Πληροφορίαν τοῦ Βοηθίου (480—524 μ. Χ.), καθ' ἣν ὁ Ἵππασος ἠσχολήθη μὲ τὴν θεωρίαν κατασκευῆς τῆς μουσικῆς κλίμακος,

3. Πληροφορίαν τοῦ Ἰαμβλίχου, καθ' ἣν ὁ Ἵππασος ἠσχολήθη μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ

4. Πληροφορίαν τοῦ Ἰαμβλίχου, καθ' ἣν ὁ Ἵππασος ἦτο ἐπίσης ὁ πρῶτος ὅστις ἐσχεδίασε καὶ κατεσκεύασε τὸ εἰς σφαῖραν ἐγγραφόμενον κανονικὸν δωδεκάεδρον καὶ ὅτι ἐδημοσίευσε τοῦτο παρὰ τὰς ἀπαγορευτικὰς διατάξεις τῆς Πυθαγορείου Σχολῆς [3].

Ἐν συνεχείᾳ προσθέτει ὁ Kurt von Fritz, ὅτι ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων πληροφοριῶν ἡ πρώτη καὶ ἡ τετάρτη ἔχουσιν ἰδιαιτέραν σπουδαιότητά τινα μόνον ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν πρώτην.

Καὶ αἱ τέσσαρες ἀνωτέρω πληροφορίαι εἶναι ἐλλιπεῖς. Διότι ἀληθὲς εἶναι ὅτι πρῶτος ὁ Πυθαγόρας ἐξετέλεσε πειράματα μὲ τὰ ἀγγεῖα καὶ τὸ μονόχορδον, ὡς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος [4], ὅστις γράφει:

«*τοὺς δὲ συμφωνοῦντας φθόγγους ἐν λόγοις τοῖς πρὸς ἀλλήλους πρῶτος ἀνευρηκέναι δοκεῖ Πυθαγόρας ...... ταύτας δὲ τὰς συμφωνίας οἱ μὲν ἀπὸ βαρῶν ἠξίουν λαμβάνειν, οἱ δὲ ἀπὸ μεγεθῶν, οἱ δὲ ἀπὸ κινήσεων* [*καὶ ἀριθμῶν*], *οἱ δὲ ἀπὸ ἀγγείων* [*καὶ μεγεθῶν*]. *Λᾶσος δὲ ὁ Ἑρμιονεύς, ὥς φασι, καὶ οἱ περὶ τὸν Μεταποντῖνον Ἵππασον Πυθαγορικὸν ἄνδρα συνέπεσθαι τῶν κινήσεων τὰ τάχη καὶ τὰς βραδυτῆτας δι' ὧν αἱ συμφωνίαι ...., ἐν ἀριθμοῦ ἡγούμενος* (sc. *Πυθαγόρας*) *λόγους τοιούτους ἐλάμβανεν ἐπ' ἀγγείων*».

Ὁ Kurt von Fritz δὲν ἔλαβεν ὑπ' ὄψει τὸ κείμενον τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, σελ. 56, 9—10 καὶ 59, 11—12, ὅπου ἀναφέρεται, ὅτι πρῶτος ἐξετέλεσε τὰ σχετικὰ πειράματα ὁ Πυθαγόρας καὶ ὄχι ὁ Ἵππασος. Ὅθεν ἡ πρώτη ἐκ τῶν τεσσάρων ἀνωτέρω πληροφοριῶν εἶναι ἐλλιπὴς καὶ κατὰ συνέπειαν ἐξαλείφονται καὶ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 2 καὶ 3 πληροφορίαι, τῶν ὁποίων ἡ ἰσχὺς ἐξαρτᾶται ὑπὸ τοῦ Kurt von Fritz ἐκ τῆς πρώτης πληροφορίας.

---

1. Die Entdeckung der Inkommensurabilität, in O. Becker, Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, S. 271—307.

2. Ἵππασος ὁ Κροτωνιάτης ἢ Μεταποντῖνος ἢ Συβαρίτης. Ἰάμβλιχος Περὶ Πυθαγορικοῦ βίου, p. 47, 3 καὶ 144, 20, Deubner.

3. Διὰ τὰς 4 πληροφορίας ἴδε καὶ H. Diels, Fr. Vorsokr. I 18 [8].

4. Theon Smyrnaeus, Expos. rer. mathem., 56, 9—59, 12, E. Hiller.

Ἀλλὰ καὶ ἡ τετάρτη πληροφορία, ἐκ τῶν ἀνωτέρω, εἶναι ἐλλιπής, διότι ὁ Ἰάμβλιχος [5] λέγει τὰ ἑξῆς :

«*Περὶ δ' Ἱππάσου λέγουσι, ὡς ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων, διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρῶτος σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα πενταγώνων ἀπόλοιτο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δὲ λάβοι ὡς ⟨εὑρών⟩, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι*».

Ὁ Kurt von Fritz δὲν ἔλαβεν ὑπ' ὄψει τὴν ἀνωτέρω φράσιν «*δόξαν δὲ λάβοι ὡς ⟨εὑρών⟩, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι*».

Μαρτυρίαν ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψε τὴν ἀσυμμετρίαν ἔχομεν τοῦ Πρόκλου [6] ὁ ὁποῖος γράφει :

«*ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν*».

Ὅτι εἰς ἓν ἐκ τῶν χειρογράφων ὑπάρχει ἡ φράσις «*τῶν ἀνὰ λόγον*» ἀντὶ τῶν «*ἀλόγων*», τὴν ὁποίαν H. Diels ἔχει περιλάβει εἰς τοὺς Vorsokratiker I 14 [4] p. 98, τοῦτο δὲν μεταβάλλει τὴν πληροφορίαν τοῦ Πρόκλου, διότι εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ φράσις «τῶν ἀνὰ λόγον», οὐδεμίαν ἔννοιαν ἔχει ἐνταῦθα καὶ εἶναι πταῖσμα τοῦ ἀντιγραφέως. Ὁ αὐτὸς Πρόκλος ἀναφέρει, ὅτι ὁ Πυθαγόρας [7], ἐκτὸς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἀνεκάλυψε καὶ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$. Αἱ ἀνακαλύψεις αὐταὶ ὑποδηλοῦσι καὶ τὸ μέγεθος τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων κατὰ τὸν 6ον καὶ 5ον αἰῶνα π. Χ., ἀφοῦ ὁ βίος τοῦ Πυθαγόρου τοποθετεῖται ἀπὸ 580—480 π. Χ. κατὰ τὰς περισσοτέρας μαρτυρίας.

Ὅτι ἄλλαι πληροφορίαι ἀποδίδουσιν εἰς τὸν Θεαίτητον [8] τὴν ἀνακάλυψιν καὶ ἐγγραφὴν εἰς σφαῖραν τοῦ ὀκταέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ τὴν σπουδὴν τῶν ἀσυμμέτρων γενικῶς, τὴν περιεχομένην εἰς τὸ 10 βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τοῦτο δὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς πληροφορίας τοῦ Πρόκλου, ὅτι πρῶτος εὑρὼν τὴν ἀσυμμετρίαν εἶναι ὁ Πυθαγόρας.

Ὁ Πλάτων ἀναφέρει εἰς τὸν Θεαίτητον (147 D 2 — 148 B 2), ὅτι κατ' ἀνακοίνωσιν τοῦ Θεαιτήτου, πρὸς τὸν διαλεγόμενον Σωκράτη, ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἀπεδείκνυε τὴν ἀσυμμετρίαν τῶν παραστάσεων $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6} \ldots \sqrt{17}$. Τοῦτο ὑποδηλοῖ, ὅτι πολὺ πρὸ τῆς συνομιλίας ἐκείνης, ἡ ὁποία τοποθετεῖται περὶ τὸ 420 π. Χ., εἶχε γίνει ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀσυμμετρίας τῆς $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία προέκυψεν ὡς πρόβλημα μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ τετραγώνου καὶ ὄχι τοῦ πενταγώνου. Τὸ τετράγωνον προηγεῖται τοῦ πενταγώνου, κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἔρευναν.

Ἐκ τῆς σπουδῆς κατὰ τὴν κατασκευὴν τετραγώνων προέκυψεν ἡ θεωρία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποίαν ἀναφέρουσιν ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος, ὁ Ἰάμβλιχος καὶ ὁ Πρόκλος [9]. Διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἀπο-

5. Ἰάμβλ. Περὶ τῆς Κοινῆς Μαθημ. Ἐπιστήμης. De comm. mathem. scient. 216. Festa 77,18—24.

6. Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην 65,15—21. Friedlein.

7. Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην 426,1—9 καὶ 428,7—21. Friedlein.

8. Εὐκλείδης, Elem. V 654. 1. Heiberg. καὶ V, 2 p. 291, 1—9, Heiberg - Stamatis.

9. Θέων Σμυρναῖος, 42,10—45, 8, Hiller. Ἰάμβλιχος, Εἰς Νικομ. Ἀριθ. Εἰσ. 128—130, Pistelli 91, 21—93, 7. Πρόκλος, Εἰς Πολιτείαν Πλάτ. II σελ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. Kroll.

δεικνύεται καὶ γεωμετρικῶς [10] ἡ ἀσυμμετρία τῆς $\sqrt{2}$. Δὲν εἶναι γνωστὸν πῶς ὁ Πυθαγόρας ἀνεκάλυψε τὴν ἀσυμμετρίαν. Ἀριθμητικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀσυμμετρίας τῆς $\sqrt{2}$ μνημονεύεται παρὰ τοῦ Ἀριστοτέλους [11] καὶ τοῦ Εὐκλείδου [12].

Ἐνδιαφέρουσαν πραγματείαν περὶ τοῦ τρόπου τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ἐδημοσίευσεν ὁ H. J. Wasckies [13], ὁ ὁποῖος ἰσχυρίζεται, ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἀνήκει εἰς τὰ πρῶτα ἐπιτεύγματα τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν.

Ὁ Kurt von Fritz στηρίζει τὴν γνώμην του, ὅτι ἡ ἀσυμμετρία ἀπεδείχθη πολὺ βραδύτερον τῆς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου καὶ εἰς ἐπιστολὴν πρὸς αὐτὸν τοῦ O. Neugebauer, ὅστις λέγει, ὅτι ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀσυμμετρίας θὰ ἔγινε τὸ ἐνωρίτερον περὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 4ου αἰ. π. Χ., διότι τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικὰ κατὰ τὸν 5ον αἰῶνα ἦσαν μηδαμινὰ καὶ εὐτελῆ. Δηλαδή, ἡ ἐπινόησις τῆς ἀποδείξεως εἰς τὰ Μαθηματικά, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἓν ἐκ τῶν ὑψίστων ἐπιτευγμάτων τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, ἡ γενομένη κατὰ τὸν 6ον αἰῶνα π. Χ., ὅτε μνημονεύονται ἀποδείξεις μαθηματικῶν προτάσεων γενόμεναι ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ [14], εἶναι κατὰ τὸν O. Neugebauer μηδαμινὴ καὶ εὐτελής. Ὁ Ἐμμανουὴλ Κάντιος [15] ἔχει ἀντίθετον γνώμην. Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ἐν προκειμένῳ τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ O. Neugebauer, ὅτι καὶ οἱ Βαβυλώνιοι εἶχον εἰς τὰ Μαθηματικά των ἓν εἶδος ἀποδείξεως [16]. Λησμονεῖ ὁ συγγραφεύς, ὅτι ἡ γνώμη του αὕτη ἀντιβαίνει πρὸς τὸν νόμον τῆς Λογικῆς, τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως (Principium exclusi tertii). Οἱ Βαβυλώνιοι ἢ εἶχον ἀπόδειξιν εἰς τὰ Μαθηματικά των ἢ δὲν εἶχον. Ἐνδιάμεσος κατάστασις δὲν ὑπάρχει.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τετραγωνισμὸς τῶν μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους τοῦ Χίου, ἡ τετραγωνίζουσα καμπύλη τοῦ Ἱππίου τοῦ Ἠλείου, τὸ θεώρημα, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (El. 12, 2), τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, καὶ ἄλλαι μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τῶν Ἑλλήνων, γενόμεναι κατὰ τὸν 5ον αἰ. π. Χ. δὲν εἶναι ἀνακαλύψεις εὐτελεῖς καὶ μηδαμιναί. Παρομοίας ἀντιλήψεις περὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν ἔχει δημοσιεύσει ὁ O. Neugebauer [17] καὶ ἀλλαχοῦ.

---

10. Otto Toeplitz, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I, S. 2—5, Berlin 1949, Springer, Paul-Henri Michel, De Pythagore à Euclid, Paris 1950, p. 438—441. Εὐ. Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμ. II σ. 8—14, Ἀθῆναι 1953.

11. Ἀριστ. Ἀναλυτικὰ Πρότερα 41α 26, Bekker.

12. Εὐκλ. Στοιχείων 10, Παράρτημα 27.

13. Eine neue Hypothese zur Entdeckung der Inkommensurablen Grössen durch die Griechen, Archiv for History of Exact Scienses, vol. 7, Nr. 5, 1971, p. 325—353, Berlin, Springer.

14. Πρόκλος εἰς Εὐκλείδην, 157, 10. 250, 20. 299, 1. 352, 14. Friedlein.

15. Imm. Kant, Kritik der reinen Vernunft, Vorrede, von R. Schmidt, Leipzig 1944.

16. O. Neugebauer, Vorgriechische Mathematik I, Berlin 1934, S. 35. 168. 203. Springer.

17. O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra [Studien zur Geschichte der antiken Algebra III] in: Quellen und Studien zur Geschichte d. Mathematik, Astronomie, Physik, B 3, Berlin 1936, S. 258 f. Und Ev. S. Stamatis, Über Euklid den Mathematiker, Das Altertum B 9. 1963. Heft 2. Berlin.

DIE ENTDECKUNG DER INKOMMENSURABILITÄT DURCH PYTHAGORAS

ZUSAMMENFASSUNG

Der hervorragende Kenner der altgriechischen Literatur Kurt vonFritz behauptet in einem Beitrag (Fussnote 1), dass die Entdeckung der Inkommensurabilität durch den Pythagoreer Hippasos gemacht wurde. Er stützt seine Meinung auf folgende vier Aussagen : 1) Anonymes Scholion in Plat. Phaedon, nachdem Hippasos als erster ein Experiment mit metallscheiben durchgeführt haben soll. 2) Boethius schreibt ihm eine Theorie der Tonleiter zu. 3) Iamblichos sagt, Hippasos habe sich mit der Theorie der Proportionen und Mittel beschäftigt, und. 4) Nach Iamblichos war Hippasos auch der erste, der den aus 12 regelmässigen Fünfecken bestehenden Kugelförmigen Körper zeichnete oder Konstruierte. Von dieser vier Aussagen sind die erste und die vierte besonders wichtig, während die zweite und dritte von einer gewissen Bedeutung in Verbindung mit der ersten sind, schreibt der Verfasser. Alle vier Aussagen sind mangelhaft, weil : der erste, der akustische Experimente mit metallscheiben gemacht hat, war Pythagoras und nicht Hippasos (F. note 4). Folglich verschwinden auch die Aussagen 2 und 3 deren Gültigkeit von der 1. Aussage abhängt. Die vierte Aussage ist auch mangelhaft, weil - wie Iamblichos schreibt - Hippasos auch als erster - der die konstruktion des regelmässigen dodekahedrons entdeckt hat - erscheinen wollte, während jedoch alles damit zusammenhängende jenem Mann zu verdanken ist, denn so redete man den Pythagoras an (F. note 5).

Zeugnis, dass Pythagoras der Entdecker der Inkommensurabilität ist, gibt Proklos (Fn. 6). Dass es in einem Manuskript der satz ἀνὰ λόγον statt ἀλόγων gibt, stört die Aussage des Proklos nicht, weil der Satz ἀνὰ λόγον hier keinen Sinn hat, und somit klar ist, dass es sich um einen Fehler des Abschreibers handelt. Die Untersuchung des Fünfeckes setzt die Untersuchung des Quadrates voraus. Den geometrischen Beweis der Inkomm. von $\sqrt{2}$ entnimmt man durch die seiten - und Diagonalzahlen (F. n. 9 und 10). Es ist nicht bekannt wie Pythagoras den Beweis der Inkommensurabilität geführt hat.

Der Verfasser stützt seine Meinung, dass die Inkomm. zeitlich nach dem Leben des Pythagoras entdect wurde, auch auf einen Brief O. Neugebauer's der schreibt, dass die griechische Mathematik im 5. Jahrhundert trivial war. Die Entdeckung des Beweises in der Mathematik im 6. Jahrhundert, die eine der höchsten Errungenschaften des menschlichen Geistes ist, ist nach O. Neugebauer trivial. Imm. Kant ist der gegenteiligen Meinung (F. n. 15). Thales von Milet hat im 6. Jahrhundert einpaar geometrische Sätze bewiesen (F. n. 14). Bemerkenswert ist das von O. Neugebauer früher geschriebene, dass die Babylonier in ihrer Mathematik eine Art von Beweise kannten. (F. n. 16). Diese Meinung stösst gegen das Gesetz der Logik, Principium exclusi tertii. Die Babylonier entweder kannten einen Beweis oder nicht. Einen intermediären Zustand gibt es nicht. Ähnliche Auffassungen hat O. Neugebauer auch früher veröffentlicht (F. note 17).

Der Satz Kreise verhalten sich wie die Quadrate über den Durchmessern (Elem. 12, 2), die Quatratur der Mödchen des Hippokrates von Chios, die Quadratrix des Hippias von Elis, das Epanthem von Thymaridas, und viele andere im 5. Jahrundert bewiesene Sätze sind nach O. Neugebauer trivial.