ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΕΚΘΕΤΑΣ ΠΑΡ' ΑΡΧΙΜΗΔΕΙ

Καθηγητῇ **ΙΩΣΗΦ Ε. ΧΟΦΜΑΝ**

Ἐπὶ τῇ 68ῃ ἐπετείῳ τῆς γεννήσεώς του (7.3.1900)

1. **Ὁ Ἀρχιμήδης** εἰς τὸ 8. πρόβλημα τοῦ II βιβλίου τῆς πραγματείας αὐτοῦ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀποδεικνύει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεγαλύτερον τμῆμα πρὸς τὸ μικρότερον ἔχει λόγον μικρότερον μὲν τοῦ λόγου τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μικροτέρου τμήματος, εἰς τὸ τετράγωνον, μεγαλύτερον δὲ τοῦ λόγου τῶν αὐτῶν ἐπιφανειῶν, εἰς τὴν $\frac{3}{2}$ δύναμιν.

Ἐὰν καλέσωμεν τὰ σφαιρικὰ τμήματα ΑΒΓ>ΑΔΓ θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα.

$$\frac{\text{σφ. τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. τμ. ΑΔΓ}} < \left(\frac{\text{ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{ἐπιφ. ΑΔΓ}}\right)^2 \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{\text{σφ, τμ. ΑΒΓ}}{\text{σφ. τμ. ΑΔΓ}} > \left(\frac{\text{ἐπιφ. ΑΒΓ}}{\text{ἐπιφ. ΑΔΓ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

2. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἀπαντῶνται διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τούτου ὅμως δὲν ἕπεται ὅτι αὗται εἶναι ἐπινόησις τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν ἀρχιμηδείων ἔργων συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι αἱ βοηθητικαὶ προτάσεις, τὰς ὁποίας οὗτος χρησιμοποιεῖ ἀναποδείκτως εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεών του, ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῇ ὑπὸ προγενεστέρων αὐτοῦ Μαθηματικῶν. Ἐνδεικτικῶς πρὸς τοῦτο ἀναφέρομεν τὴν ἀναποδείκτως χρησιμοποιουμένην πρότασιν ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 3, καθ' ἣν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Τὴν πρότασιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 3. θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προηγουμένης προτάσεως, καίτοι αὐτὴ ἀπαντᾷ διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν, δὲν ἀποδίδεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Διότι ὑπάρχουν τεκμήρια τοῦ συγγενοῦς πρὸς τοῦτον ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 2, τοῦ ἐπιτυγχανομένου διὰ τῶν καλουμένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ὅστις ἀποδίδεται εἰς τοὺς Πυθαγορείους (Θέων Σμυρναῖος, ἔκδ. Hiller, Leipzig 1878, σελ. 42—45 καὶ Πρόκλος, Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος II, ἔκδ. Kroll. Leipzig σελ. 24 καὶ 393. Ταῦτα ἀναπτύσσονται εἰς Εὐαγγέλου Σ. Σταμάτη, Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων βιβλία V—IX, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8 κ.ἑ.).

3. Ἡ ἄλγεβρα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἴτε ὑπὸ ἀριθμητικὴν εἴτε ὑπὸ γεωμετρικὴν μορφήν, ἀνεπτύχθη συγχρόνως πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ τὴν γεωμετρίαν. Ἡ γνώμη αὐτὴ ἐπιμαρτυρεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς ἐνδείξεων:

α΄. Ἐκ τοῦ Θυμαριδείου Ἐπανθήματος. Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦτο καλεῖται μέθοδος ἐπιλύσεως προβλήματος, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται τὸ ἄθροισμα ν ἀγνώστων καὶ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ν—1 ἐξισώσεων καὶ ν ἀγνώστων, ἤτοι

$$
\begin{aligned}
x+x_1+x_2+\dots\dots+x_{\nu-1} &= S \\
x+x_1 &= S_1 \\
x+x_2 &= S_2 \\
x+x_{\nu-1} &= S_{\nu-1}
\end{aligned}
$$

Κατὰ τὸν ἐκ Πάρου μαθηματικὸν καὶ μαθητὴν τοῦ Πυθαγόρου **Θυμαρίδαν,** ἀκμάσαντα περὶ τὸ 500 π. Χ., ὅτε ὁ **Πυθαγόρας** ἦτο ἤδη γέρων, ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εἶναι

$$x=\frac{(S_1+S_2+\dots\dots+S_{\nu-1})-S}{\nu-2}$$

(Ε. Σταμάτη, Τὸ Θυμαρίδειον Ἐπάνθημα, «Πλάτων» ἔτος Δ΄—τεῦχος Α 1952 σελ. 123—142).

Ὁ Ἰάμβλιχος, ὅστις ἀναφέρει τὸ πρόβλημα τοῦτο, μνημονεύει καὶ τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως:

$$
\textbf{1.}\quad
\begin{aligned}
x+y &= 2\,(z+u) \\
x+z &= 2\,(y+u) \\
x+u &= 2\,(y+z)
\end{aligned}
$$

[Ἐνταῦθα ἀναφέρει ἀκόμη $x+y+z+u=5\,(y+z)$]

καὶ **2.**

$$
\begin{aligned}
x+y &= \frac{3}{2}\,(z+u) \\
x+z &= \frac{4}{3}\,(y+u) \\
x+u &= \frac{5}{4}\,(y+z)\,\cdot
\end{aligned}
$$

Αἱ λύσεις καὶ τῶν τριῶν ἀνωτέρω μνημονευομένων προβλημάτων ἀναφέρονται ὑπὸ τοῦ Ἰαμβλίχου λεκτικῶς μόνον καὶ ἄνευ συμβολισμοῦ τινος (Ἰάμβλιχος, εἰς Νικομάχου Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν, H. Pistelli, Leipzig 1894, σελ. 62 κ.ἑ.).

β'. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν βιβλίων VIII καὶ IX τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται θεωρήματα περὶ γεωμετρικῶν προόδων.

γ'. Ἐκ τῶν δέκα πρώτων θεωρημάτων τοῦ II βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου γίνεται ἀπόδειξις ἀλγεβρικῶν ταὐτοτήτων.

δ'. Ἐκ τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις (α καὶ β) ἡ Ἄλγεβρα σπουδάζεται ἀριθμητικῶς, ἐν ᾧ εἰς τὰς περιπτώσεις γ καὶ δ γεωμετρικῶς.

4. Δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ἐκφραζομένους ὅμως ἐμμέσως, ἀπαντῶμεν καὶ εἴς τινα θεωρήματα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων ταῦ Εὐκλείδου. Δὲν ἀναφέρεται εἰς αὐτὰ ὅμως σαφῶς ὅτι πρόκειται περὶ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας, ὅπως τοῦτο γίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ X 27 θεώρημα τῶν Στοιχείων, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται δύο εὐθεῖαι «μέσαι», αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσύμμετροι, τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι ῥητόν. Αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{καὶ} \quad \rho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}$$

κατὰ τὸν σύγχρονον συμβολισμόν, ὅπου ρ εἶναι εὐθεῖα ῥητή, καὶ α,β ἀκέραιοι ἀριθμοί. (Ε. Σταμάτη, Εὐκλείδου Περὶ ἀσυμμέτρων, Στοιχείων βιβλίον X, Ἐθνικὸν Τυπογραφεῖον, Ἀθῆναι 1957, σελ. 251).

5. Ὁ **Ἀρχιμήδης** κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ἀνωτέρω μνημονευομένου προβλήματος καταλήγει εἰς τὰς σχέσεις

$$\frac{\Theta B}{BK} = \frac{KZ}{ZH}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{\Theta B}{BE=BK}, \quad \frac{\Theta Z^2}{ZK^2} > \frac{KZ}{ZH}$$

καὶ συμπεραίνει ἀμέσως, παραλείπων τοὺς ἐνδιαμέσους ὑπολογισμοὺς ὡς εὐκόλους καὶ γνωστούς, ὅτι

$$\frac{\Theta Z}{ZH} > \left(\frac{KZ}{ZH}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Εἶναι δὲ εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ΘΖ=σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΓ, ΖΗ=σφαιρικὸν τμῆμα ΑΔΓ, καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος ΚΖ=ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΓ, καὶ ΖΗ=ἐπιφάνεια σφαιρικοῦ τμήματος ΑΔΓ.

6. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους **Εὐτόκιος** παρέχει τὴν ἑξῆς ἑρμηνείαν τῆς εὑρέσεως τῆς δυνάμεως μὲ τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην:

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ>Γ>Δ καὶ ἂς εἶναι

$$\frac{AB^2}{\Gamma^2} > \frac{\Gamma}{\Delta}. \ (1). \quad \text{Λέγω, ὅτι} \ \frac{AB}{\Delta} > \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Διότι, ἂς ληφθῇ τῶν Γ,Δ μέση ἀνάλογος ἡ Ε. [Ὁπότε εἶναι

$$\frac{\Gamma}{E}=\frac{E}{\Delta},\ \frac{\Gamma^2}{E^2}=\frac{E^2}{\Delta^2}=\frac{\Gamma\times E}{E\times\Delta}=\frac{\Gamma}{\Delta},\ (2).$$

Ταῦτα θεωρεῖ εὐκόλως ἐννοούμενα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 9 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου]. Ἐκ τῶν (1,2) εἶναι $\frac{AB}{\Gamma}>\frac{\Gamma}{E}$· Λαμβάνει εὐθεῖάν τινα $BZ<AB$, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{BZ}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{E}$ [ὁπότε αἱ εὐθεῖαι ΒΖ,Γ,Ε,Δ ἀποτελοῦν τέσσαρας συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, ἤτοι εἶναι

$$\frac{BZ}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{E}=\frac{E}{\Delta},\ \frac{BZ^3}{\Gamma^3}=\frac{\Gamma^3}{E^3}=\frac{E^3}{\Delta^3}=\frac{BZ\times\Gamma\times E}{\Gamma\times E\times\Delta}=\frac{BZ}{\Delta}\ (3).$$

Ταῦτα ἕπονται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου].

Ἐκ τῆς (3) εἶναι $\frac{BZ}{\Delta}=\frac{\Gamma^3}{E^3}$, (4). Εἶναι δὲ ἐκ τῆς (2) καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta}=\frac{\Gamma^2}{E^2}$, (5).

Εἶναι ἄρα $\frac{BZ}{\Delta}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$, (6). [Διότι ἐκ τῆς (5) λαμβάνει $\frac{\Gamma}{E}=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}$ καὶ κατόπιν $\left(\frac{\Gamma}{E}\right)^3=\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$ καὶ ἐκ ταύτης καὶ τῆς (3) ἕπεται ἡ (6)].

Ἐπειδὴ δὲ $AB>BZ$, ἕπεται $\frac{AB}{\Delta}>\left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}$.

7. Ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἑρμηνείας τοῦ Εὐτοκίου, ἡ εὕρεσις δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Τὴν γενίκευσιν τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 γνωρίζει ὁ Εὐκλείδης, ἀλλὰ δὲν τὴν ἀναφέρει, ὡς εὐκόλως νοητήν. Κατωτέρω διαμνημονεύομεν τὴν ἑρμηνείαν τῶν ὁρισμῶν 9 καὶ 10 τοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ἀκολούθως δὲ τὴν ἐκ τούτων προκύπτουσαν γενίκευσιν, ἡ ὁποία ἐνθυμίζει εἰς ἡμᾶς τὴν γνωστὴν εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (Vollständige Induktion).

Εὐκλείδου V ὁρισμὸς 9. Ἔστωσαν τρεῖς συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου Α, Β, Γ ἤτοι $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}$· Ἐκ τούτων ἔχομεν $\frac{A^2}{B^2}=\frac{B^2}{\Gamma^2}=\frac{A\times B}{B\times\Gamma}=\frac{A}{\Gamma}$·

Εὐκλείδου V ὁρισμὸς 10. Ἔστωσαν τέσσαρες συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου Α, Β, Γ, Δ ἤτοι $\frac{A}{B}=\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Gamma}{\Delta}$· Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{\Delta^3} = \frac{A \times B \times \Gamma}{B \times \Gamma \times \Delta} = \frac{A}{\Delta}.$$

Ἡ γενίκευσις τῶν ἀνωτέρω Εὐκλειδείων ὁρισμῶν

Ἔστωσαν ν τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅροι γεωμετρικῆς προόδου

$A, B, \Gamma, \Delta, \ldots\ldots, K, \Lambda, M$ ἤτοι $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}$, (7).

Ἐκ τούτων ἔχομεν

$$\frac{A^{\nu-1}}{B^{\nu-1}} = \frac{B^{\nu-1}}{\Gamma^{\nu-1}} = \frac{\Gamma^{\nu-1}}{\Delta^{\nu-1}} = \ldots\ldots \frac{K^{\nu-1}}{\Lambda^{\nu-1}} = \frac{\Lambda^{\nu-1}}{M^{\nu-1}} = \frac{A \times B \times \Gamma \times \ldots \times K \times \Lambda}{B \times \Gamma \times \ldots \times \Lambda \times M} = \frac{A}{M}, \quad (8).$$

Γενίκευσις τῆς εὑρέσεως δυνάμεως μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην τῆς μορφῆς

$$\frac{\nu-1}{\nu-2} \quad (\nu=4, 5, 6 ., \ldots).$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ν—1 τὸ πλῆθος συνεχεῖς ὅρους γεωμετρικῆς προόδου, παραλείποντες τὸν πρῶτον ὅρον A εἰς τὴν σχέσιν (7), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M},$$

$$\frac{B^{\nu-2}}{\Gamma^{\nu-2}} = \frac{\Gamma^{\nu-2}}{\Delta^{\nu-2}} = \ldots\ldots = \frac{K^{\nu-2}}{\Lambda^{\nu-2}} = \frac{\Lambda^{\nu-2}}{M^{\nu-2}} = \frac{B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K \times \Lambda}{\Gamma \times \Delta \times \ldots\ldots \times \Lambda \times M} = \frac{B}{M}, \quad (9).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν $\frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{1}{\nu-2}}$, (10), καὶ ἐκ ταύτης $\left(\frac{B}{\Gamma}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-2}}$, (11). Ἐκ τῶν (8) καὶ (11) εἶναι

$$\frac{A}{M} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu-2}}, \quad (\nu=4, 5. 6 \ldots.).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων θεωροῦμεν φανερὸν ὅτι δυνάμεις μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας τῆς μορφῆς $\frac{\nu-1}{\nu-2}$ $(\nu = 4, 5, 6 \ldots.)$ ἦσαν γνωσταὶ πολὺ πρὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ πότε διὰ πρώτην φορὰν ἔγινεν ἡ σπουδὴ αὐτῶν. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἀριθμητικὰ βιβλία τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἀποδίδονται κατὰ μέγα μέρος εἰς τοὺς Πυθαγορείους, καταλήγομεν εἰς τὴν πιθανότητα ὅτι ἡ σπουδὴ δυνάμεων μὲ κλασματικοὺς ἐκθέτας ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὸν 5ον αἰῶνα π.Χ. ὑπὸ τῶν Πυθαγορείων.

S U M M A R Y

For Prof. Dr. JOSEPH E. HOFMANN

On his 68th Birthday

POWERS WITH FRACTIONAL EXPONENTS BY ARCHIMEDES

Powers with fractional exponents we meet for the first time in the history of Mathematics to the 8th problem of the second book of Archimedes work about sphere and cylinder.

The ancient Greeks developed the algebra contemporarily to tbe arithmetic and geometry. This is concluded from the «bloom» of Thymaridas and from the books II, V, VIII, IX, X of Euclid's Elements.

Powers with fractional exponents, but expressed indirectly and not visibly, we are finding in to the X book of Euclid's Elements, as e.g. to the X 27, where the two medial straight lines are of the form :

$$\rho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ and } \rho \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

The use of powers with fractional exponents by Archimedes without any proof, means that the study of them has been done long time before of the Archimedes. As it is concluded from the commentaries of Eutokios to the above 8th problem of Archimedes, the study of those powers is supported to the definitions 9 and 10 of the V book of the Euclid's Elements.

Which period for the first time have being showed those definitions, which constitutes theorems of general aspect, is unknown.

We are including these definitions :

Euclid V defin. 9. Let it be three continuous terms of geometrical progression, the A, B, Γ, that is $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$.

From these are $\frac{A^2}{B^2} = \frac{B^2}{\Gamma^2} = \frac{A \times B}{B \times \Gamma} = \frac{A}{\Gamma}$.

Euclid V defin. 10. Let it be four continuous terms of geometrical progression, the A, B, Γ, Δ, that is $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

From these are $\frac{A^3}{B^3} = \frac{B^3}{\Gamma^3} = \frac{\Gamma^3}{\Gamma^3} = \frac{A \times B \times \Gamma}{B \times \Gamma \times \Delta} = \frac{A}{\Delta}$.

And in general

Let it be the goemetrical progression $A, B, \Gamma, \Delta, \ldots, K, \Lambda, M$ of continuous terms, that is

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots = \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}, \quad (1).$$

From these are

$$\frac{A^{n-1}}{B^{n-1}} = \frac{B^{n-1}}{\Gamma^{n-1}} = \frac{\Gamma^{n-1}}{\Delta^{n-1}} = \ldots\ldots = \frac{K^{n-1}}{\Lambda^{n-1}} = \frac{\Lambda^{n-1}}{M^{n-1}} =$$

$$= \frac{A \times B \times \Gamma \times \ldots\ldots \times K \times \Lambda}{B \times \Gamma \times \Delta \times \ldots\ldots \times K \times \Lambda \times M} = \frac{A}{M}, \quad (2).$$

If to the geometrical progression $A, B, \Gamma, \ldots\ldots, K, \Lambda, M$ we are going to omit the first term A, we shall have from the remaining $n-1$ terms

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Delta} = \ldots\ldots \frac{K}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{M}.$$

From these are

$$\frac{B^{n-2}}{\Gamma^{n-2}} = \frac{\Gamma^{n-2}}{\Delta^{n-2}} = \ldots\ldots = \frac{K^{n-2}}{\Lambda^{n-2}} = \frac{\Lambda^{n-2}}{M^{n-2}} = \frac{B \times \Gamma \times \Delta \times \ldots\ldots \times K \times \Lambda}{\Gamma \times \Delta \times \ldots\ldots \times \Lambda \times M} = \frac{B}{M}, \quad (3).$$

From the (3) we get

$$\frac{B}{\Gamma} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{1}{n-2}}, \quad (4) \text{ and from these we have} \left(\frac{B}{\Gamma}\right)^{n-1} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}, \quad (5).$$

From the (2,5) we get $\frac{A}{M} = \left(\frac{B}{M}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}$, $(n=4, 5, 6 \ldots\ldots)$.

We believe very probable that the study of the powers with fractional exponents, has been done by the Pythagoreans during the 5th century b. C.